$$\omega^i = M^{ij}\omega_j \quad (M^{ij} = M^{ji}), \quad \omega^n = 0,$$

$$\omega^{\hat i}_{n-1} = N^{\hat i\hat j}\omega_{\hat j}, \quad \omega^{\hat i}_n = (N^{\hat i n-1,k} + N^{\hat i\hat j}a^k_{\hat j})\,\omega_k,$$

$$\omega^{n-1}_{\hat i} = -a^j_{\hat i}\,\omega_j,$$

$$\omega^{n-1}_n = -\frac{1}{n-2}\,a^{\hat i j}_{\hat i}\cdot\omega_j .$$

Используя частичную канонизацию репера R ,найдем тензор кривизны $R^{ik\ell}_j$ связности Γ_M ,индуцируемой конгруэнцией π_M . Связность Γ_M назовем полуплоской,если $R^{ik\ell}_i = 0$. Справедливы теоремы.

Т е о р е м а 1. Если тензор кривизны R_M связности Γ_M, порожденной полем нормалей N ,равен нулю,то все аффинные нормали поверхности (A) образуют связку параллельных прямых.

Т е о р е м а 2. Три утверждения эквивалентны: 1) тензор кривизны связности,определенной в многообразии направлений прямых K_1 путем проектирования смежных с K_1 направлений на исходное параллельно гиперплоскости P_{n-1} ,равен нулю; 2) существует расслоение от конгруэнции $[A, K_1]$ к конгруэнции гиперплоскостей P_{n-1} ; 3) связность Γ_M является полуплоской.

Связность Γ_M является эквиаффинной,если $R^{ikj}_{Mj} = 0$. Условия эквиаффинности связности Γ_M имеют вид:

$$(n-3)(N^{\hat i,n-1,\hat k} - N^{\hat k,n-1,\hat i}) + (n-2)(a^{\hat k}_{\hat j}N^{\hat i\hat j} - a^{\hat i}_{\hat j}N^{\hat k\hat j}) = 0,$$

$$a^{n-1}_{\hat j}\left((n-1)N^{\hat i\hat j} - N^{\hat j\hat i}\right) + (n-2)N^{\hat i,n-1,n-1} + a^{\hat j\hat i}_{\hat j} = 0 .$$

Полуплоская связность является эквиаффинной,если $N^{\hat i\hat j} = N^{\hat j\hat i}$, $N^{\hat i,n-1,\hat k} = N^{\hat k,n-1,\hat i}$.

Библиографический список

1. Ж а р и к о в а Л.А. Об оснащении многообразия фигур, индуцированного конгруэнцией нецентральных квадратичных элементов в A_n //Тезисы докл.VI Прибалтийской геом.конф.Таллин, 1984.С.43.

2. Ж а р и к о в а Л.А. О некоторых геометрических свойствах конгруэнции парабол//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.17.С.30-33.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.76

ОБ ОДНОМ ОСНАЩЕНИИ АФФИННОГО РАССЛОЕНИЯ $A_{m,n}$ $(m < n)$

Е.Т. И в л е в
(Томский политехнический институт)

В статье строится одно аффинно-инвариантное поле нормалей P_I в смысле А.П.Нордена [1,с.197-198] расслоенного пространства $A_{m,n}$ с аффинной связностью C ,базой которого служит m-мерное дифференцируемое многообразие $\mathfrak{M}_m$,а слоем,отвечающим точке $(u) \in \mathfrak{M}_m$,является n-мерное аффинное пространство A_n.

Все встречающиеся в работе функции предполагаются аналитическими.

1.Рассмотрим пространство $A_{m,n}$ аффинной связности C с точечным образующим элементом,которое представляет собой $(m+n)$-мерное расслоенное пространство с m-мерной дифференцируемой базой $\mathfrak{M}_m$ и n-мерными аффинными слоями A_n с заданным сечением: каждой точке $(u) \in \mathfrak{M}_m$ в слое $A_n(u)$ отвечает точка $A(u)$. Предполагается,что слой $A_n(u)$ отнесен к аффинному реперу $E = \{\bar A(u), \bar e_i(u)\}$ $(i,j,k,\ell = \overline{1,n})$,где $\bar A(u)$ -радиус-вектор точки $A(u)$ в слое $A_n(u)$,соответствующей точке $(u) \in \mathfrak{M}_m$.С помощью связности C слой $A_n(u+du)$ точки $(u+du) \in \mathfrak{M}_m$ отображается на исходный слой $A_n(u)$ точки $(u) \in \mathfrak{M}_m$ при помощи следующего отображения аффинных реперов:

$$\begin{cases} \bar A(u+du) \longrightarrow \bar A(u,du) \doteq \bar A(u) + \omega^k \bar e_k(u), \\ \bar e_i(u+du) \longrightarrow \bar e_i(u,du) \doteq \bar e_i(u) + \omega^k_i \bar e_k(u). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь 1-формы ω^k и ω^k_i зависят от m главных $u^1, u^2, \dots, u^m$ и n^2 вторичных параметров и удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + R^i_{0\alpha\beta}\,\omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad \mathcal{D}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k + R^j_{i\alpha\beta}\,\omega^\alpha \wedge \omega^\beta. \tag{2}$$

Здесь компоненты $R^K_{J\alpha\beta}$ $(J,\mathcal{J},K = \overline{0,n})$ тензора кручения-кривизны,кососимметричные по α и β ,удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla R^i_{0\alpha\beta} = R^i_{0\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma, \quad \nabla R^j_{i\alpha\beta} = R^j_{i\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma \quad (\alpha,\beta,\ldots = \overline{1,m}). \tag{3}$$

Аффинный репер E в слое $A_n(u)$ точки $A(u)$ секущей m-поверхности $\mathcal{M}^\circ_m$ расслоения $A_{m,n}$ выбирается так, что $L_m=(A_0A_1\dots A_m)$-касательная m-плоскость к $\mathcal{M}^\circ_m$ в точке A в смысле [2, с.8]. Тогда дифференциальные уравнения секущей m-поверхности $\mathcal{M}^\circ_m$ расслоения $A_{m,n}$ ($m<n$) в силу (2) и (1) можно записать в виде

$$\omega^{\hat\alpha}=0,\quad \omega^{\hat\alpha}_\alpha=A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta,\quad \nabla A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}=A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma\quad (\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n}). \qquad (4)$$

2. Будем говорить, что аффинное расслоение $A_{m,n}$ ($m<n$) оснащено, если на базе $\mathcal{M}_m$ задано поле геометрического объекта [3], компоненты которого удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$B_I=\{b^\alpha_{\hat\alpha}\},\quad \nabla b^\alpha_{\hat\alpha}+\omega^\alpha_{\hat\alpha}=-b^\alpha_{\hat\alpha\beta}\,\omega^\beta. \qquad (5)$$

Геометрический объект B_I каждой точке $(u)\in\mathcal{M}_m$ в слое $A_n(u)$ сопоставляет $(n-m)$-плоскость P_I: $L_m\cup P_I=A_n$, $P_I\cap L_m=A$, которая в аффинных слоевых координатах определяется уравнениями

$$P_I:\ x^\alpha=b^\alpha_{\hat\alpha}\,x^{\hat\alpha} \qquad (5)$$

и в соответствии с [1, с.197-198] называется нормалью первого рода, или оснащением расслоения $A_{m,n}$ ($m<n$).

Если компоненты геометрического объекта B_I являются функциями величин $A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}$, $R^i_{o\alpha\beta}$ и $R^j_{i\alpha\beta}$, то нормаль P_I, или оснащение расслоения $A_{m,n}$ ($m<n$), называется внутренней нормалью, или внутренним оснащением этого расслоения.

3. Как и в [6] (см.(5), с.24), показывается, что каждой точке $T(u)\in A_n(u)$: $\bar T=\bar A+t^j\bar e_j$ и $(m-1)$-плоскости $\Gamma_{m-1}\subset L_m$: $y_\alpha x^\alpha=0$, $x^{\hat\alpha}=0$, отвечающим точке $(u)\in\mathcal{M}_m$ расслоения $A_{m,n}$, сопоставляется линейный комплекс

$$K_{m-1}(T,\Gamma_{m-1}):\ y_\alpha t^J \overset{*}{R}{}^\alpha_{J\sigma\tau}v^\sigma w^\tau=0,\ v^{\hat\sigma}=0,\ w^{\hat\tau}=0\ \ (t^0=1), \qquad (6)$$

где

$$\overset{*}{R}{}^\alpha_{J\sigma\tau}=R^\alpha_{J\sigma\tau}-b^\alpha_{\hat\alpha}R^{\hat\alpha}_{J\sigma\tau}, \qquad (7)$$

$K_{m-1}(T,\Gamma_{m-1})=\{(v,w)\mid R(v,w)T\in\Gamma_{n-1}\}\subset L_m$; $\Gamma_{n-1}=\Gamma_{m-1}\cup P_I$; $R(v,w)$ - аффинное преобразование слоя $A_n(u)$ в себя, соответствующее направлениям $v\in L_m$ и $w\in L_m$ в смысле [4] (см.(8)). Из (6) следует, что точке $T\in A_n$ и направлению $v\in L_m$ точки $(u)\in\mathcal{M}_m$ отвечает аффинное преобразование

$$\Pi(T,v)=\{t^J\overset{*}{R}{}^\alpha_{J\sigma\tau}v^\tau\}, \qquad (8)$$

переводящее $(m-1)$-плоскость Γ_{m-1} в $(m-1)$-плоскость $\Gamma^*\subset L_m$,

соответствующую направлению $v\in L_m$ в нуль-системе $K(T,\Gamma_{m-1})$. Следовательно, каждому направлению $v\in L_m$ в слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_m$ отвечает гиперплоскость

$$E_{n-1}(v)=\{T\mid\Pi(T,v)\to W\}:\ t^J\overset{*}{R}{}^\alpha_{J\alpha\sigma}v^\sigma=0\quad (t^0=1). \qquad (9)$$

Здесь $\Pi(T,v)\to W$ означает, что аффинное преобразование $\Pi(T,v)$ является преобразованием W в смысле [5], т.е. преобразованием с нулевым следом.

О п р е д е л е н и е 1. Линейное подпространство

$$\mathcal{L}_{n-m}(P_I)=\bigcap_{v\in L_m}E_{n-1}(v):\ t^J\overset{*}{R}{}^\alpha_{J\alpha\sigma}=0\quad (t^0=1) \qquad (10)$$

называется ассоциированным нормали P_I в слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_m$ расслоения $A_{m,n}$. Нормаль P_I в слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_m$ расслоения $A_{m,n}$ ($m<n$) называется основной нормалью, если она в этом слое параллельна своей ассоциированной ($n-m$)-плоскости $\mathcal{L}_{n-m}(P_I)$.

Из (10), (7) и (5) с учетом определения I следует, что нормаль P_I будет основной тогда и только тогда, когда

$$\varphi_{\hat\beta\beta}\equiv R^{\hat\alpha}_{\gamma\alpha\beta}\,b^\alpha_{\hat\alpha}\,b^\gamma_{\hat\beta}+(R^{\hat\gamma}_{\hat\beta\sigma\beta}-\delta^{\hat\gamma}_{\hat\beta}R^\alpha_{\sigma\alpha\beta})\,b^\sigma_{\hat\gamma}-R^\alpha_{\hat\beta\alpha\beta}. \qquad (11)$$

Из (11) и (8) в [4] вытекает следующая

Т е о р е м а I. В общем случае в каждом слое $A_n(u)$ точки $(u)\in\mathcal{M}_m$ аффинного расслоения $A_{m,n}$ ($m<n$) существует конечное число основных нормалей P_I. Если в каждом слое $A_n(u)$ образы m-плоскости L_m при аффинных преобразованиях $R(v,w)$, $\forall v\in L_m$, $\forall w\in L_m$ параллельны L_m, то в этом слое в общем случае существует единственная соответствующая основная нормаль.

4. Рассматривается n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к проективному реперу $T=\{A_J\}$ $(J,\mathcal{J},K,L=\overline{0,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$dA_J=\omega^K_J A_K,\quad \mathcal{D}\omega^K_J=\omega^L_J\wedge\omega^K_L,\quad \omega^J_J=0, \qquad (12)$$

и в нем m-мерное многообразие пар (S,σ_{n-1}), каждая из которых состоит из точки $S=A_0$ и гиперплоскости $\sigma_{n-1}=(A_1,\dots,A_n)\not\ni S$, $m<n$, причем $L_m=(A_0A_1\dots A_m)$-касательная m-плоскость к m-поверхности S_m в точке S, описываемой точкой S. Тогда с учетом (12)

$$\omega^{\hat\alpha}_0=0,\quad \omega^{\hat\alpha}_\alpha=A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_0,\quad \omega^0_i=A^0_{i\beta}\,\omega^\beta_0, \qquad (13)$$

$$\nabla A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}+A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\,\omega^0_0=A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0,\quad \nabla A^0_{i\beta}+2A^0_{i\beta}\,\omega^0_0=A^0_{i\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0$$

Если $X=x^iA_i\in G_{n-1}$ – текущая точка характеристического элемента H^* гиперплоскости G_{n-1}, то H^* определяется уравнениями

$$H^*:\ x^0=0,\quad x^iA^0_{i\sigma}=0. \qquad (14)$$

В соответствии с [1, с.213] заключаем, с учетом (12) и (13), что в аффинном расслоении $A_{m,n}$, базой которого является m-поверхность S_m, а слоем, соответствующим точке $A_0\in S_m$, служит центропроективное пространство $P_n=A_0\cup G_{n-1}$, локально изоморфное n-мерному аффинному пространству, определяется аффинная связность C^m с формами, удовлетворяющими структурным уравнениям

$$\Omega^\alpha=\omega^\alpha_0,\quad \Omega^j_i=\omega^j_i-\delta^j_i\,\omega^0_0,$$
$$D\Omega^\alpha=\Omega^\gamma\wedge\Omega^\alpha_\gamma,\quad D\Omega^j_i=\Omega^k_i\wedge\Omega^j_k+R^j_{i\alpha\beta}\,\Omega^\alpha\wedge\Omega^\beta, \qquad (15)$$

где компоненты тензора кривизны $R^j_{i\alpha\beta}$ определяются по формулам

$$R^j_{i\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\,\delta^j_{[\alpha}A^0_{|i|\beta]}+\frac{1}{2}\,\delta^j_i\,A^0_{[\beta\alpha]}. \qquad (16)$$

Из (14)-(16) и (11) вытекает следующая

Т е о р е м а 2. Линейные подпространства L_m и H^* в каждой точке $A_0\in S_m$ неподвижны при аффинных преобразованиях $R(v,w)$, $\forall v\in L_m, \forall w\in L_m$. Нормаль $P_1=A_0\cup H^*$ к S_m в точке A_0 в общем случае, т.е. в случае, когда $\dim H^*=n-m-1$, и только она является единственной основной нормалью в аффинной связности C^m.

Библиографический список

1. Н о р д е н А.П. Пространство аффинной связности.М.,1976.

2. И в л е в Е.Т.Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1974.Вып.4.С.6-28.

3. Л а п т е в Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.математ.о-ва.М.,1953.Т.2.С.275-382.

4. И в л е в Е.Т.О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1984.Вып.15.С.32-37.

5. И в л е в Е.Т.,Исабеков М.Б.К проективной геометрической интерпретации некоторых образов,определяемых двухвалентными тензорами//Материалы третьей научной конференции по математике и механике /Томский ун-т.Томск.1973.Вып.1.С.50-52.

6. И в л е в Е.Т.Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1985.Вып.16.С.23-26.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.В.К и р е е в а
(Московский автодорожный институт)

В данной работе рассматриваются свойства отображения $f:(\Omega\subset P_3)\to(\bar\Omega\subset P_3)$, которое имеет двумерное и одномерное распределения двойных линий.

1. В проективном пространстве P_3 заданы две диффеоморфные области $\Omega,\bar\Omega$ ($\Omega\cap\bar\Omega=\varnothing$). Диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar\Omega$ переводит точку $A\in\Omega$ в точку $B\in\bar\Omega$. Области $\Omega,\bar\Omega$ нормализованы [2] в смысле А.П.Нордена одним и тем же семейством гиперплоскостей:

$$A\to\Pi_2(A),\quad B\to\Pi_2(A),\quad B\notin\Pi_2(A).$$

Введенные нормализации определяют в областях $\Omega,\bar\Omega$ аффинные связности $\nabla,\bar\nabla$. Отображение f переводит сеть $\Sigma_3\subset\Omega$ в сеть $\bar\Sigma_3\subset\bar\Omega$. К областям $\Omega,\bar\Omega$ присоединены подвижные реперы $R^A=\{A,A_i\}$, $R^B=\{B,B_i\}$ ($i=1,2,3$), где A_i, B_i – нормальные точки [2] касательных к линиям $\omega^i,\bar\omega^i$ сетей $\Sigma_3,\bar\Sigma_3$. Точки B,B_i в репере R^A имеют следующие представления:

$$\vec B=\vec A+\gamma^i\vec A_i,\quad \vec B_i=\gamma^j_i\vec A_j \qquad (i,j=1,2,3). \qquad (1)$$

Из результатов работы [3] следует, что если относительные инварианты $\gamma^i_j=0$ $(i\neq j)$, а среди абсолютных инвариантов γ^i_i ($i=1,2,3$) есть два одинаковых $\gamma^1_1=\gamma^2_2\neq\gamma^3_3$, то в области Ω существуют два распределения Δ_1,Δ_2 такие, что $\Delta_1(A)=(AA_3)$, $\Delta_2(A)=(AA_1A_2)$. Эти распределения характеризуются тем, что любая линия ℓ этих распределений – двойная [1], причем касательные к линиям ℓ и $\bar\ell=f(\ell)$ пересекаются в точках нормализующей плоскости $\Pi_2(A)$. В области $\bar\Omega$ возникают образы $\bar\Delta_1$, $\bar\Delta_2$ распределений Δ_1,Δ_2 в индуцированном отображении f_{*A}: $\bar\Delta_1(B)=(BB_3)$, $\bar\Delta_2(B)=(BB_1B_2)$.